الإجترار (العودية) مرة أخرى

لنستخدم بايثون في شيء ما: هل يمكن إيجاد قيمة النسبة التقريبية π حسابيا؟

بالطبع يمكن!

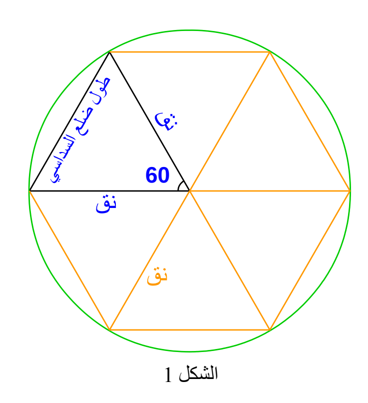
لنر الان ما هو تعريف النسبة التقريبية: إن نسبة محيط أي دائرة إلى قطرها ثابت.

c = محيط الدائرة
r = نصف القطر
π = النسبة التقريبية (المطلوب)

القانون: $c = 2\pi r$

إذن: $\pi = \frac{c}{r*2}$

لكننا نعلم بأن الدائرة هي أيضا مضلعا لا منتهي (عدد أضلاعه كبير الى ما لا نهاية). إذن فالسداسي هو في الحقيقة دائرة، ليست دائرة دقيقة لكنها دائرة. لنفحص نسبة محيط السداسي إلى نصف قطره:



الشكل 1

في الشكل السداسي المنتظم تقسّم الزاوية المركزية الكلية (360) الى ستة اقسام متساوية، أي أن الزاوية بين ضلعي المثلث الأسود في الشكل السابق هي 360÷6 = 60.

في الشكل السابق أيضا نعلم بأن ضلعي هذه الزاوية (60) هما نصف قطر للدائرة التي تحتوي السداسي (الدائرة الخضراء). أي أن المثلث الأسود متساوي الساقين على الاقل.

و لكون هذا المثلث متساوي الساقين، فالزاويتين المتبقيتين فيه هما 60 و 60 أيضا: $60 = \frac{180-60}{2}$

إذن فزوايا المثلث كلها 60 و عليه فهو مثلث متساوي الأضلاع. أي أن طول الضلع الخارجي للسداسي = نصف القطر r.

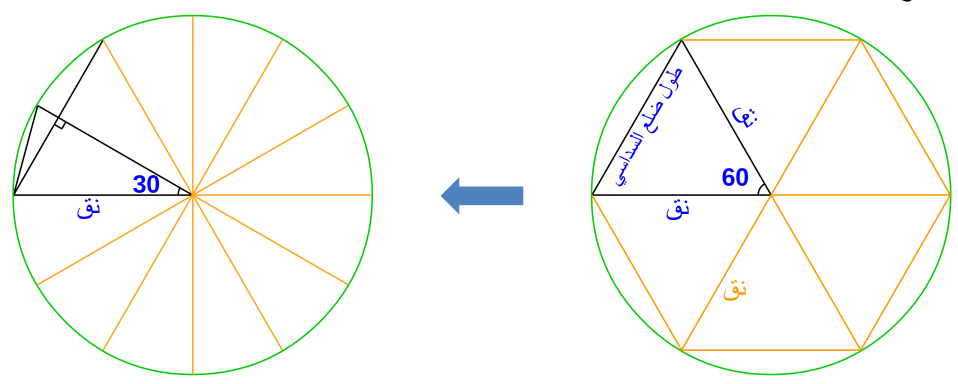
اعتبرنا أن السداسي دائرة، إذن فمحيط هذه الدائرة هو مجموع الاضلاع الخارجية للسداسي $6 \times r$

أصبح بحوزتنا الان المحيط c و نصف القطر r، لنحسب π:

$$\pi = \frac{c}{r*2} \leftarrow \pi = \frac{r*6}{r*2} \leftarrow \pi = 3$$

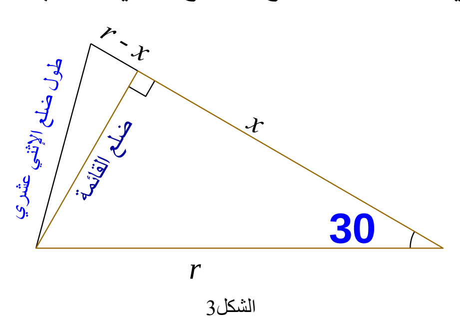
إذن π ساوت 3 في مثالنا هذا (جواب قريب، لكن ليس بما يكفي (......= π 3.14159)

الذي جعل الجواب ليس قريبا بما يكفي هو قلة عدد أضلاع المضلع، كلما ازدادت ازداد القرب من الجواب الصحيح، لنجرب بإثني عشر ضلعا:



الشكل2: المضلع بـ 12 ضلعا

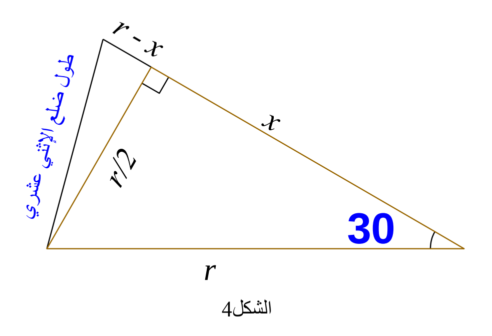
لكي نحسب π علينا إيجاد محيط المضلع (الدائرة) الجديد: و هو طول الضلع الخارجي × 12
لنفصل المثلث الأسود في الشكل2 لكي نحسب طول ضلع المضلع الاثني عشري.



الشكل3

قبل الاستمرار، انظر الى الشكل3 و تأكد بأنك توافق على المعطيات المكتوبة عليه.
لقد قسمنا هذا المثلث إلى مثلثين قائمين (يفصلهما ضلع القائمة).و لكي نحسب طول ضلع الإثني عشري يجب معرفة $r - x$ و طول ضلع الزاوية القائمة لكونه وترا في مثلث قائم الزاوية.

لنحسب الان طول ضلع القائمة الذي يفصل المثلثين:
في المثلث الكبير (x ، r، و ضلع القائمة):
بما أن الزاوية 30 تنصف زاوية السداسي (الشكل2) فستنصف أيضا الضلع المقابل لها.
إذن فطول ضلع القائمة هو $\frac{\text{طول ضلع السداسي}}{2}$ أي $\frac{r}{2}$



الشكل4

أصبح لدينا طولي ضلعين في مثلث قائم (r و $r/2$). سنحسب قيمة x باستخدام فيثاغورس:
الوتر ^{2} = الضلع الاول^2 + الضلع الثاني^2 :

$$r^2 = (\frac{r}{2})^2 + x^2$$
$$x^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$$
$$x = \sqrt{\frac{3}{4}r^2}$$
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

الآن و قد علمنا قيمة x لنحسب طول ضلع الإثني عشري، و لنرمز له بحرف t مثلا:
فيثاغورس مرة أخرى: الوتر ^{2} = الضلع الاول^2 + الضلع الثاني^2

$$t^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2$$

ثم نستبدل قيمة x بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ من العملية السابقة:

$$t^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2$$
$$t^2 = \frac{1}{4}r^2 + r^2 - \sqrt{3}r^2 + \frac{3}{4}r^2$$
$$t^2 = 2r^2 - \sqrt{3}r^2$$
$$t = \sqrt{2r^2 - \sqrt{3}r^2}$$

كان هذا طول ضلع الإثني عشري. قد تبدو المعادلة معقدة شيئا ما، لكن هذا لا يهم طالما لايوجد غير متغير واحد r.
محيط الإثني عشري هو $12 \times t$ أي:

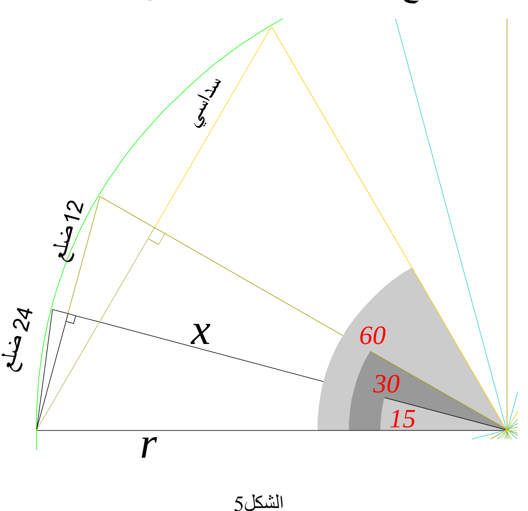
$$12\sqrt{2r^2 - \sqrt{3}r^2}$$

أصبح لدينا المحيط و بقسمته على القطر $2r$ سنتنج قيمة مقربة لـ π:
لكي نسهل العمل سنفرض قيمة لـ r و لتكن 1:

$$\pi = \frac{12\sqrt{2 * 1^2 - \sqrt{3} * 1^2}}{2 * 1}$$

استعمل الحاسبة لهذا و ستكتشف بأن $\pi = 3.1058285412302491481867860514884$
واضح أن هذا تقريب أفضل.
لنقترب أكثر:

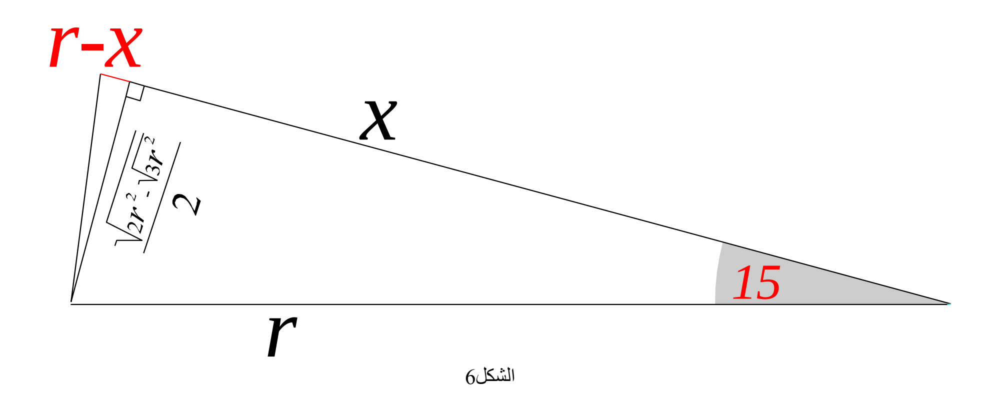
قربتنا 12 ضلعا من قيمة π أكثر من 6 أضلاع. ماذا لو ضاعفنا العدد الى 24؟



الشكل5

لاحظ أن ضلع القائمة الجديد هو نصف ضلع الاثني عشري $\frac{\sqrt{2r^2-\sqrt{3}r^2}}{2}$

و لنفصل المثلث الأسود الجديد مرة أخرى:



الشكل6

و مرة أخرى سنحسب قيمة x لكي نستطيع حساب الضلع الخارجي في المضلع 24:

في المثلث الكبير ($r, x, \frac{\sqrt{2r^2-\sqrt{3}r^2}}{2}$):

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{\sqrt{2r^2 - \sqrt{3}r^2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 = r^2 - \frac{2r^2 - \sqrt{3}r^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{4r^2}{4} - \frac{2r^2 - \sqrt{3}r^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{4r^2 - 2r^2 + \sqrt{3}r^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{2r^2 + \sqrt{3}r^2}{4}$$

$$x=\sqrt{\frac{2r^2+\sqrt{3}r^2}{4}}$$

ثم نستخدم قيمة x لحساب وتر المثلث الصغير (الضلع الخارجي للمضلع 24) و لنسمه t مرة أخرى:
في المثلث الصغير (ضلع ال24، r-x، $\frac{\sqrt{2r^2-\sqrt{3}r^2}}{2}$)

$$t^2=\left(\frac{\sqrt{2r^2-\sqrt{3}r^2}}{2}\right)^2+(r-x)^2$$

ثم نستبدل x بقيمتها $\sqrt{\frac{2r^2+\sqrt{3}r^2}{4}}$ من العملية السابقة:

$$t^2=\left(\frac{\sqrt{2r^2-\sqrt{3}r^2}}{2}\right)^2+\left(r-\sqrt{\frac{2r^2+\sqrt{3}r^2}{4}}\right)^2$$

$$t^2=\frac{2r^2-\sqrt{3}r^2}{4}+\left(r-\sqrt{\frac{2r^2+\sqrt{3}r^2}{4}}\right)^2$$

ثم نحسب قيمة t:

$$t=\sqrt{\frac{2r^2-\sqrt{3}r^2}{4}+\left(r-\sqrt{\frac{2r^2+\sqrt{3}r^2}{4}}\right)^2}$$

كان هذا طول ضلع المضلع 24. و بضربه في 24 ينتج محيط المضلع (الدائرة).

$$c=24\sqrt{\frac{2r^2-\sqrt{3}r^2}{4}+\left(r-\sqrt{\frac{2r^2+\sqrt{3}r^2}{4}}\right)^2}$$

و لنستبدل r برقم سهل (1 مثلا) لكي نحسب قيمة π:

$$c=24\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}+\left(1-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\right)^2}$$

المحيط = 24 ×0.2610523844401031830968124557 = 6.2652572265624763943234989389833

و بقسمة المحيط على القطر

$$\pi=\frac{6.2652572265624763943234989}{2}=3.13262861328123819716174946$$

نحن نقترب ..... لنضاعف عدد الاضلاع ثانية:

لكن لنتوقف قليلا الآن، و لنلاحظ بأننا نكرر عملية ما كل مرة:

- بدأنا بمضلع و كان سداسيا و أوجدنا الضلع الخارجي و صادف أن يكون r و منثم المحيط.
- قسمنا المحيط على القطر و حصلنا على π الاولى.
- **ضاعفنا أضلاع المضلع السابق.**
- لاحظنا أن الزاوية الجديدة تنصف الضلع الخارجي للمضلع السابق و تكون عمودية عليه.
- لذلك قسمنا المثلث الجديد الى مثلثين قائمين.
- استخدمنا فيثاغورس لإيجاد x.
- ثم استخدمنا فيثاغورس لإيجاد الضلع الخارجي.
- ثم ضربنا الضلع الخارجي بعدد أضلاع المضلع لنحصل على المحيط.
- ثم نقسم النتيجة على $2r$ للحصول على π
- **ضاعفنا أضلاع المضلع السابق**
- لاحظنا .....

و بما أننا لن نتوقف عند 24 ضلعا فسيكون من المفيد حوسبة العملية لكي نكررها إلى ما هو أبعد من قدرتنا على الحساب اليدوي:

الاجترار:

بعض الحيوانات، العاشبة، تبتلع كميات من الأعشاب أكبر مما يشبعها لكن لا تهضمها، فقط تخزنها. ثم عندما تتوقف عن الأكل تبدأ بدفع أجزاء المخزون من جوفها إلى فمها و تمضغه لكي تهضمه دفعة بعد دفعة حتى ينتهي المخزون. يسمى هذا اجترارا، و هو أقرب ما رأيت للمفهوم الحوسبي recursion و الكثير يسمونه "عودية".

لنطبق مفهوم الاجترار للحصول على قيمة أدق للنسبة التقريبية:

```
from math import sqrt                                      #  استيراد sqrt من math
#Calculates PI mathmatically                               #
#Tareq Zeidalkilani: kelany@hotmail.com                    #  طارق زيد الكيلاني
                                                           #
def myPi(r, segLength, segments, accuracy):                #  ترويسة الإقتران و القرائن
    if segments == accuracy:                               #  حالة الأساس
        print segments                                     #  إطبع عدد الأضلاع (فقط لعلاج الأخطاء)
        print segLength*(6*2**segments)/(r*2)              #  إطبع قيمة النسبة التقريبية
        return                                             #
                                                           #
    half = segLength/2                                     #  نصّف الضلع الذي سيستخدم لتقسيم المثلث الجديد الى مثلثين قائمين
    print 'half= ' + str(half)                             #  إطبعه (فقط لعلاج الاخطاء)
    x = sqrt(r**2 - half**2)                               #  قيمة x (أنظر أحد الاشكال السابقة)
    print 'x= ' + str(x)                                   #  إطبعها (فقط لعلاج الاخطاء)
    segLength = sqrt(half**2+(r-x)**2)                     #  طول الضلع الخارجي للمضلع الجديد
    print 'segLength= ' + str(segLength)                   #  إطبعه (فقط لعلاج الاخطاء)
    segments = segments+1                                  #  عدد الأضلاع
    print 'segments= ' + str(segments)                     #  اطبعه (فقط لعلاج الاخطاء)
    myPi(r, segLength, segments, accuracy)                 #  نادي الاقتران نفسه و لكن بطول الضلع الخارجي الجديد و عدد جديد للأضلاع.

myPi(10,10, 0, 30)                                         #  نداء الاقتران
```

في هذا النص البرمجي استدعينا `sqrt` من مديول `math` لئلا نضطر لكتابة `math.sqrt` في كل مرة.
ثم عرفنا اقترانا يأخذ 4 قرائن: نصف القطر `r`، طول الضلع الخارجي للمضلع الحالي `segLength`، عدد أضلاع المضلع `segments` ثم الدقة المطلوبة للقيمة المرجعة للنسبة التقريبية.

في الاجترار يجب أحيانا وضع شرط ما لكي يتوقف الاقتران عن نداء نفسه، و إلا فسينادي نفسه الى الابد. يسمى هذا الشرط "حالة الأساس" و هنا كان عندما يصل عدد مضاعفات عدد أضلاع المضلع إلى `accuracy`.
إن توفر هذا الشرط سينفذ البرنامج ما بداخل العبارة المشروطة و الذي سنرى ما هو لاحقا.
ثاني عبارة بعد العبارة المشروطة مباشرة هي ترجمة لما قمنا به يدويا سابقا من أن نصف الضلع الخارجي هو ضلع القائمة الذي ينصف المثلث الى مثلثين قائمين.
العبارة الثالثة أوجدت قيمة x.
و العبارة الرابعة أوجدت طول الضلع الخارجي الجديد و عينته لـ `segLength`.
عبارة الإزادة segments = segments + 1 مهمة أيضا لأنها ستساعد في حساب عدد الأضلاع النهائي.
العبارة الاخيرة في متن الاقتران هي لب الاجترار:
هذه العبارة تستدعي اقتران اسمه `myPi` و هو الاقتران الذي يحتويها!
إلا أن القرائن التي تمررها له تختلف عن القرائن الابتدائية التي مررت إليه:

- قيمة `segments` ازدادت 1
- قيمة `segLength` تغيرت حسب العبارة الرابعة.
- بقيت قيمتي r و `accuracy` على حالهما.

آخر عبارة في البرنامج هي عبارة نداء الاقتران. و قد مررت له القرائن الابتدائية.

لنرى **سريان التنفيذ**:
يبدأ سريان العمليات بالسطر الأول و يستمر عموديا إلى آخر سطر.
تعريف الاقتران لا ينفذ إلا إن نودي الاقتران. إذن فسريان التنفيذ سيقفز فوق الاقتران و يتابع.
العبارة التي تلي تعريف الاقتران (تعريف الاقتران هو الترويسة و المتن (كل ما بداخل الاقتران)) هي نداء اقتران و ستنفذ.
عبارة نداء الاقتران مررت للاقتران القرائن التالية:

- R = 10 نصف القطر
- segLength = 10 طول الضلع الخارجي
- segments = 0 عدد مضاعفات اضلاع المضلع
- accuracy = 30 الدقة.

يبدأ تنفيذ الاقتران بهذه القرائن:

```
def myPi(10, 10, 0, 30):
    if 0 == :30
        print segments
        print segLength*(6*2**segments)/(r*2)
        return

    half = segLength/2
    x = sqrt(r**2 - half**2)
    segLength = sqrt(half**2+(r-x)**2)
    segments = segments+1
    myPi(r, segLength, segments, accuracy)
```

نق، طول الضلع الخارجي، مضاعفات، الدقة المطلوبة
هل أصبحت مضاعفات الاضلاع مساوية للدقة؟ لا
تخطى
تخطى
تخطى

أوجد طول ضلع القائمة (نصف الضلع الخارجي للمضلع "السابق") = 5
أوجد قيمة x = 8.66025403784
أوجد الطول الضلع الخارجي للمضلع = 5.17638090205
ضاعف عدد أضلاع المضلع = 1
نادي الاقتران myPi بالقرائن الجديدة :

```
def myPi(10, 5.17638090205, 1, 30):
    if 1 == :30
        print segments
        print segLength*(6*2**segments)/(r*2)
        return

    half = 5.17638090205/2
    x = sqrt(r**2 - half**2)
    segLength = sqrt(half**2+(r-x)**2)
    segments = segments+1
    myPi(r, segLength, segments, accuracy)
```

هل أصبحت مضاعفات الاضلاع مساوية للدقة؟ لا
تخطى
تخطى
تخطى

أوجد طول ضلع القائمة 2.58819045103
أوجد قيمة x = 9.65925826289
أوجد الطول الضلع الخارجي للمضلع = 2.6105238444
ضاعف عدد أضلاع المضلع =2
نادي الاقتران بالقرائن الجديدة:

و يستمر الاقتران هكذا الى أن تصبح قيمة المضاعفات 30

```
def myPi(10, 1.95055743902e-08, 29, 30):
    if 29 == :30
        print segments
        print segLength*(6*2**segments)/(r*2)
        return

    half = segLength/2
    x = sqrt(r**2 - half**2)
    segLength = sqrt(half**2+(r-x)**2)
    segments = segments+1
    myPi(r, segLength, segments, accuracy)
```

لا

9.75278719511e-09
10.0
9.75278719511e-09
30
ثم يستدعى الاقتران و مضاعفات الاضلاع أصبحت 30

```
def myPi(10, 10, 30, 30):
    if 30 == :30
        print segments
        print segLength*(6*2**segments)/(r*2)
        return

    half = segLength/2
    x = sqrt(r**2 - half**2)
    segLength = sqrt(half**2+(r-x)**2)
    segments = segments+1
    myPi(r, segLength, segments, accuracy)
```

هل أصبحت مضاعفات الاضلاع مساوية للدقة؟ **نعم**
اطبع عدد المضاعفات (لعلاج الاخطاء فقط)
اطبع عدد الاضلاع×طول الضلع÷القطر (النسبة التقريبية)
ارجع ....

لا يتم تنفيذ باقي المتن بعد هذا
بل يعود الاقتران الى عبار النداء الأولى (التي في آخر البرنامج)
ثم ينفذ العبارات التي تليها إن كانت هنالك عبارات.